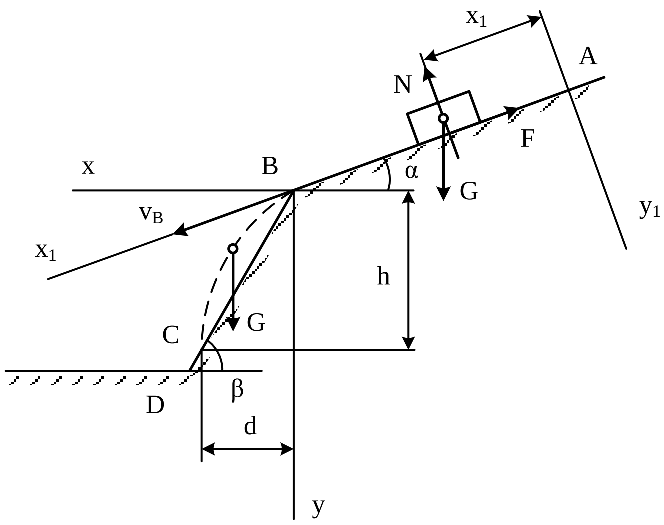
Этот файл сачан с сайта http://teor-meh.ru

ЗАДАНИЕ Д1-1

Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $\beta = 60°$

Найти: τ и h

РЕШЕНИЕ:



Рассмотрим движение тела на участке АВ. Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес $\overline{G}$, нормальную реакцию $\overline{N}$ и силу трения скольжения $\overline{F}$.

Составим дифференциальные уравнение движения в проекциях на оси x_1 и y_1:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1} \\ m\ddot{y}_1 = \sum Y_{i1} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F \\ 0 = N - G\cos\alpha \end{cases}$$

Из второго уравнения:

$$N = G\cos\alpha$$

Сила трения скольжения:

$$F = fN$$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$$

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha$$

Дважды интегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1$$

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = x_A = 0$ и $\dot{x}_{10} = v_A = 0$

Находим:

$$C_1 = \dot{x}_{10} - g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_0 = 0 - 9{,}8(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866)\cdot 0 = 0$$

$$C_2 = x_{10} - g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t_0^2}{2} - C_1 t = 0 - 9{,}8(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866)\frac{0^2}{2} - 0\cdot 0 = 0$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$$

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

Для момента τ, когда тело покидает участок:

$$\dot{x}_1 = v_B \quad \text{и} \quad x_1 = l$$

Т.е.:

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2}$$

Отсюда находим:

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{9{,}8(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866)}} \approx 2{,}5 \text{ (с)}$$

$$v_B = 9{,}8(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866)\cdot 2{,}5 \approx 8{,}01 \text{ (м/с)}$$

Рассмотрим движение тела на участке ВС. На тело действует только вес $\overline{G}$.

Составим дифференциальные уравнение движения в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum X_i \\ m\ddot{y} = \sum Y_i \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = g \end{cases}$$

Дважды интегрируем полученные дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_3 \\ x = C_3 t + C_5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{y} = gt + C_4 \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6 \end{cases}$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_{Bx} = v_B\cos\alpha$ и $\dot{y}_0 = v_{By} = v_B\sin\alpha$.

Тогда

$$C_3 = \dot{x}_0 = v_B\cos\alpha$$

$$C_5 = x_0 - C_3 t_0 = 0 - v_B\cos\alpha\cdot 0 = 0$$

$$C_4 = \dot{y}_0 - gt_0 = v_B\sin\alpha - 9{,}8\cdot 0 = v_B\sin\alpha$$

$$C_6 = y_0 - \frac{gt_0^2}{2} - C_4 t_0 = 0 - \frac{9{,}8\cdot 0^2}{2} - v_B\sin\alpha\cdot 0^2 = 0$$

Тогда дифференциальные уравнения на участке ВС принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_B\cos\alpha \\ x = v_B\cos\alpha\cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{y} = gt + v_B\sin\alpha \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + v_B\sin\alpha\cdot t \end{cases}$$

В момент падения $t = T$, $y = h$ и $x = d$, т.е.

$$d = v_B\cos\alpha\cdot T$$

$$h = \frac{gT^2}{2} + v_B\sin\alpha\cdot T$$

Выразим время T из первого уравнения:

$$T = \frac{d}{v_B\cos\alpha} = \frac{h\cdot ctg\beta}{v_B\cos\alpha}$$

Подставим найденное выражение во второе уравнение:

$$h = \frac{g\left(\dfrac{h\cdot ctg\beta}{v_B\cos\alpha}\right)^2}{2} + v_B\sin\alpha\cdot\frac{h\cdot ctg\beta}{v_B\cos\alpha} = \frac{g}{2}\left(\frac{h\cdot ctg\beta}{v_B\cos\alpha}\right)^2 + tg\alpha\cdot h\cdot ctg\beta$$

Подставляем известные значения:

$$h = \frac{9{,}8}{2}\left(\frac{h\cdot 0{,}577}{8{,}01\cdot 0{,}866}\right)^2 + 0{,}577\cdot h\cdot 0{,}577$$

$$0{,}667h = 0{,}034h^2$$

$$0{,}667 = 0{,}034h$$

$$h = \frac{0{,}667}{0{,}034} \approx 19{,}62 \text{ (м)}$$

Ответ: $\tau \approx 2{,}5$ с, $h \approx 19{,}62$ м