

ЗАДАНИЕ К1-00

Дано: уравнения движения точки в плоскости $xу$: $x = 4 \sin \frac{\pi t}{6}$, $y = 4 - 9 \cos \frac{\pi t}{6}$; $t_1 = 1$ с.

Найти: уравнение траектории точки; скорость и ускорение, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории в момент $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ:

1. Уравнение траектории.

Для определения уравнения траектории точки исключим время t из заданных уравнений движения.

Вспользуемся свойством тригонометрических функций $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\text{Тогда } \left(\sin \frac{\pi t}{6} \right)^2 = \left(\frac{x}{4} \right)^2, \left(\cos \frac{\pi t}{6} \right)^2 = \left(\frac{4-y}{9} \right)^2 \text{ и } \frac{x^2}{16} + \frac{(4-y)^2}{81} = 1.$$

Это уравнение эллипса: малая полуось равна 4, а большая - 9.

2. Скорость точки.

Скорость найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{6}, v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{6}.$$

При $t = t_1 = 1$ с

$$v_x = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi \cdot 1}{6} \approx 1,81 \text{ (см/с)}, v_y = \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi \cdot 1}{6} \approx 2,36 \text{ (см/с)}$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1,81^2 + 2,36^2} \approx 2,97 \text{ (см/с)}$$

3. Ускорение точки.

Находим аналогично:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{6}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi t}{6}$$

При $t = t_1 = 1$ с

$$a_x = -\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi \cdot 1}{6} \approx -0,55 \text{ (см/с}^2\text{)}, a_y = \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi \cdot 1}{6} \approx 2,14 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0,55^2 + 2,14^2} \approx 2,21 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

4. Касательное ускорение.

Используем формулу $a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$

При $t = t_1 = 1$ с

$$a_\tau = \frac{-1,81 \cdot 0,55 + 2,36 \cdot 2,14}{2,97} \approx 1,37 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

5. Нормальное ускорение.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2,21^2 - 1,37^2} \approx 1,74 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

6. Радиус кривизны траектории.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2,97^2}{1,74} \approx 5,07 \text{ (см)}$$

v	a	a_τ	a_n	ρ
см/с		см/с ²		см
2,97	2,21	1,37	1,74	5,07

